

בחינה בגיאומטריה חישובית
פרופ' דן הלפרין

משך הבחינה שלוש שעות.
אין להשתמש בחומר עזר.
קראו בעיון את השאלות והשיבו בדיוק ובאופן תמציתי.

- אם לא נכתב במפורש אחרת, אז:
- ניתן להניח מצב כללי
 - כאשר מצוין זמן הריצה הרצוי של אלגוריתם, זה נתון לבחירתכם אם זה זמן הריצה בתוחלת או במקרה הגרוע ביותר.

השתמשו בדף הראשון של ההגשה שלכם רק כדי (i) לציין על איזה שאלות השבתם בחלק א, וכן (ii) לתת את התשובות של חלק ב'.

בהצלחה!

חלק א' (81 נקודות)

השיבו על שלוש מתוך ארבע השאלות הבאות, וציינו בראש העמוד הראשון של מחברת הבחינה על אילו שאלות השבתם:

שאלה 1 (27 נקודות)

נתונה קבוצה S של n קטעים ישרים (סגמנטים) במישור, זרים בזוגות. נתונה נקודה במישור p שלא נמצאת על אף אחד מהקטעים ב S .

א. (21 נקודות) תארו אלגוריתם עם זמן ריצה $O(n \log n)$ שמוצא קרן (אינסופית) שנקודת הקצה שלה היא p ואינה חותכת אף קטע ישר ב S , או מודיע שאין אף קרן כזו אם אכן לא קיימת.

ב. (6 נקודות) כיצד תשנו את האלגוריתם של סעיף א', אם בכלל צריך, כדי שיתאים למקרה שבו הסגמנטים ב S אינם בהכרח זרים.

שאלה 2 (27 נקודות)

פוליגון פשוט P נקרא כוכבי (star-shaped) אם קיימת נקודה s בתוכו ממנה ניתן לראות כל נקודה אחרת בפוליגון, כלומר לכל נקודה אחרת p בתוך P , הקטע הישר sp מוכל ב P . שני פוליגונים כוכביים P ו- Q נקראים קו-כוכביים אם מאותה נקודה s במישור שנמצאת בחיתוך של שני הפוליגונים ניתן לראות כל נקודה אחרת ב P (בהתעלם מ Q) וכל נקודה אחרת ב Q (בהתעלם מ P).

א. (14 נקודות) נתון פוליגון כוכבי P עם m קודקודים ופוליגון כוכבי Q עם n קודקודים. תארו בקצרה אלגוריתם עם זמן ריצה $O(m+n)$ לקבוע האם P ו- Q הם קו-כוכביים.

ב. (13 נקודות) תארו מבנה נתונים שמשמש ב $O(m+n)$ מקום ובעזרתו ניתן להשיב ביעילות על שאילתות מהסוג הבא: האם נקודה q במישור מוכלת בחיתוך של שני הפוליגונים P ו- Q כנ"ל שהם קו-כוכביים. מהו זמן השאילתה? נתחו והסבירו את זמן הבניה של המבנה.

שאלה 3 (27 נקודות)

בשיעור תיארו כיצד לבנות kd -tree דו מימדי על אוסף P של n נקודות במישור, כאשר כל הנקודות של P מופיעות בעלים של העץ. השכבה הראשונה מחולקת לפי חציון של הנקודות ב- x : כל הנקודות שערך x שלהן קטן או שווה לחציון יופיעו כעלים בילד השמאלי של הצומת, וכל השאר בילד הימני. השכבה השנייה מחולקת לפי חציון של הנקודות המתאימות ב- y , השכבה הבאה לפי x , וחוזר חלילה.

א. (10 נקודות) תארו במפורט כיצד משיבים בעזרת המבנה על שאילתות טווח אורתוגונליות: בהינתן מלבן R מקביל לצירים מהן הנקודות של P שמוכלות בו.

ב. (17 נקודות) נתחו במפורט את זמן הריצה של שאילתת טווח כנ"ל.

שאלה 4 (27 נקודות)

נתון אוסף L של n ישרים במישור במצב כללי: אין שניים מקבילים, אין שלושה שנפגשים בנקודה אחת ואין ישרים אנכיים. **צלע** במערך $A(L)$ היא חלק מקסימאלי של ישר מ- L שאינו חותך אף ישר אחר; חלק מהצלעות הן קטעים ישרים וחלק הן קרניים. **הרמה** של נקודה במישור היא מספר הישרים ב- L שעוברים ממש מתחת לנקודה. שימו לב שהרמה של כל הנקודות השייכות לצלע במערך היא אותה רמה. נתונים הישרים. המערך לא נתון מראש.

א. (7 נקודות) תארו בקצרה אלגוריתם שמוצא צלע אחת במערך שרמתה $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ בזמן $O(n)$.

ב. (20 נקודות) נתון מספר $k, 0 \leq k < n$. תארו בקצרה אלגוריתם המחשב בזמן $O(n^2)$ את כל הצלעות של המערך שרמתן k .

חלק ב' (21 נקודות)

השיבו על כל השאלות בחלק זה. כיתבו את התשובות בעמוד הראשון שאתם מגישים, מיד אחרי מספרי השאלות של חלק א' שבחרתם להשיב עליהן. מלבד התשובה באות (א, ב, וכו') אתם יכולים להוסיף הסבר של עד שתי שורות. ההסבר יקרא רק אם תתגלה בעיה.

שאלה 5 (7 נקודות)

כמה משולשים יש בשילוש של אוסף P של n נקודות במישור כש k מתוכן על שפת הקמור של P ?

- א. $2n-5$
- ב. $3n-6$
- ג. $2n-2-k$
- ד. $2n+2-k$

שאלה 6 (7 נקודות)

נתון אוסף ישרים במישור במצב כללי במישור. סדר החיתוך של הישרים, מלמטה למעלה, עם ישר אנכי ב $x = \infty$ הוא הפוך מסדר החיתוך של הישרים מלמטה למעלה עם ישר אנכי ב $x = -\infty$.

- א. נכון
- ב. לא נכון

שאלה 7 (7 נקודות)

במבנה איתור נקודות במפה מישורית עם n קטעים, שבנינו באופן אינקרמנטלי רנדומי, זמן שאילתה מקסימאלי פורפוציוני ל

- א. קבוע
- ב. $\log n$
- ג. \sqrt{n}
- ד. n